Evaluation formative pré-CC1

Angélique Perrillat-Mercerot, 2020

Les consignes

Ce document est une évaluation formative pré-CC1. Il n'est pas suffisant pour aborder sereinement le CC1. Je vous conseille vivement de le compléter en vous entrainant à faire du calcul matriciel.

Il s'agit d'un **QCM à choix multiples**. Si au moins une de vos réponses est fausse, vous perdez des points. Si votre réponse est incomplète (toutes les propositions justes ne sont pas cochées) vous n'aurez qu'une partie des points.

Bon courage. :)

Les questions

1) Il n'y a qu'une manière d'écrire une matrice donnée.
   A) vrai
   B) faux

   Réponse B. Elle peut être écrite sous forme totale (où tous les coefficients sont explicités) ou sous forme compacte (exercice 2 du TD1)

2) La matrice identité est en fait une matrice...
   A) avec des 1 sur la première colonne et des 0 partout ailleurs
   B) avec des 1 sur la première ligne et des 0 partout ailleurs
   C) composée uniquement de 1
   D) aucune de ces réponses

   Réponse D. C'est une matrice avec des 1 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs.

3) A appartient à $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ veut dire que A...
   A) a 3 lignes et 4 colonnes
   B) a 4 lignes et 3 colonnes
   C) a des coefficients qui sont dans $\mathbb{C}$
   D) aucune de ces réponses

   Réponses A et C. A a 3 lignes et 4 colonnes et dont les coefficients sont dans R (voir TD1 ou cours). Cependant R est un ensemble inclus dans C (tous les éléments de $\mathbb{R}$ appartiennent à $\mathbb{C}$) donc A appartient aussi à $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$.

4) Si A et B sont deux matrices alors AB et BA,...
   A) sont nécessairement existantes ou impossible à calculer en même temps
   B) sont nécessairement de même taille si elles existent
   C) sont nécessairement égales si elles existent
   D) aucune de ces réponses

Réponse D. Parfois un produit est possible mais pas l'autre : par exemple si A est de taille 3x3 et B de taille 3x2 alors AB existe mais pas BA (exercice 5, TD1). Si AB et BA existent, les matrices résultantes ne sont pas forcément de même taille et si elles le sont elles ne sont pas forcément égales.

5) Si AB=BA, on dit que A...
   A) est l'inverse de B
   B) est la transposée de B
   C) commute avec B
   D) aucune de ces réponses

   Réponse C. Voir exercice 12, TD1.

6) Soit A dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et B dans $\mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ alors le produit AB...
   A) n'existe pas
   B) existe et appartient nécessairement à $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$
   C) existe et appartient nécessairement à $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$
   D) aucune de ces réponses

   Réponse D. Le produit existe bien car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. D'après "l'équivalent de la relation de Chasles pour les matrices", AB a 2 lignes et 4 colonnes. Les coefficients de la matrice sont une somme de produits des coefficients de A et de B donc ils appartiennent à $\mathbb{C}$. Donc la matrice existe et elle appartient à $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{C})$.

7) Soit A dans $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ telle que A=$(i-j)$ pour i allant de 1 à 3 et j allant de 1 à 3 alors la matrice A...
   A) a $(0,1,2)$ comme première ligne
   B) possède des 0 sur la diagonale
   C) a $(0,-1,-2,-3)$ comme première ligne
   D) possède des 1 sur la diagonale

   Réponse B. La matrice A possède des 0 sur sa diagonale puisqu'on a alors i=j. Sa première ligne est $(0,-1,-2)$.

8) La matrice nulle de taille n est telle que...
   A) elle est carrée
   B) $O_nA = AO_n$ pour toutes les matrices A carrées de taille n
   C) si $AB = O_n$ alors $A = O_n$ ou $B = O_n$
   D) aucune de ces réponses

   Réponses A et B. La matrice nulle de taille n est bien une matrice carrée et on a $O_nA = AO_n = O_n$ pour toute matrice A carrée de taille n. En revanche il existe des matrices non-nulles telles que leur produit soit nul, voir exercice 5, TD1.

9) Soit A une matrice ayant 43 lignes et 43 colonnes et B sa transposée alors
   A) A et B ont le même nombre de lignes
   B) AB est nécessairement la matrice identité de taille 43
   C) BA est nécessairement la matrice nulle de taille 43
   D) aucune de ces réponses

   Réponse A. B est la transposée de A veut dire que les colonnes de A sont les lignes de B et inversement. Ainsi B possède 43 lignes et 43 colonnes. Donc B a bien autant de lignes que A et on peut même dire que AB et BA existent. Impossible de savoir plus de ces produits.

10) Soient A et B deux matrices carrées de taille n telles que B=A^2 et A est inversible alors...

   A) Si A est une matrice diagonale, nécessairement B l'est aussi

   B) Si B est une matrice diagonale, nécessairement A l'est aussi

   C) ${}^tAB{}^tA=I_n$.

   D) aucune de ces réponses

   Réponses A et C. Le produit de matrices diagonales est une matrice diagonale, en revanche si le carré d'une matrice est diagonale on ne peut pas affirmer que cette matrice est diagonale (exercice 14, TD1). ${}^tAB{}^tA={}^tAAA{}^tA=I_nI_n=I_n$.

11) Soit une matrice A de taille n composée uniquement de 2 alors,

   A) det(A)=0

   B) ${}^tA=A$

   C) A est symétrique

   D) aucune de ces réponses

   Réponses A, B et C. Comme toutes les colonnes de A sont égales, son déterminant est nul. Si on inverse ses lignes et ses colonnes on a la même matrice donc elle est bien égale à sa transposée. On a également la propriété de symétrie.

12) Soient A et B les matrices suivantes, alors...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   A) AB existe et son coefficient en haut à gauche est 6

   B) BA existe et son coefficient en haut à gauche est 6

   C) A+B=C où
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   D) aucune de ces réponses

   Réponse D. aucune de ces réponses. Seul AB existe mais son premier coefficent est 9. Les matrices peuvent s'additionner uniquement si elles sont de même dimension et terme à terme...

13) On peut dire de la matrice A ci-dessus que...

   A) son déterminant est 4

   B) son déterminant est 0

   C) on ne peut pas calculer son déterminant

   D) aucune de ces réponses

   Réponse B. On a $2C_1=C_2$ donc son déterminant est nul. Il est bien calculable car la matrice est carrée.

14) Calculer le déterminant d'une matrice permet de savoir...

   A) si la matrice est inversible

   B) si la matrice a une transposée

   C) si la matrice est nilpotente

   D) aucune de ces réponses

   Réponse A. Un déterminant nul montre que la matrice n'est pas inversible (TD2).

15) Une formule pour calculer l'inverse d'une matrice quand il existe serait...
   A) det(A)*^{t}com(A)
   B) det(A)*com(A)
   C) ^{t}com(A)/det(A)
   D) com(A)/det(A)

   Réponse C. ^{t}com(A)/det(A)...à savoir par coeur !

16) Si A est inversible alors,
   A) det(A)=0
   B) ses lignes sont liées
   C) l'équations AX=V n'admet aucune solution
   D) son inverse l'est aussi

   Réponse D. Si A est inversible, alors son inverse l'est aussi. Bah oui, l'inverse de A^{-1} est A par définition. Pour les autres propositions cela implique que A n'est pas inversible.

17) Si une matrice A est telle que $A^3 \neq I_n$ et $A^4 = I_n$ alors,
   A) A est nilpotente d'ordre 4
   B) $A^{-1}=A^3$
   C) A est inversible
   D) aucune de ces réponses

   Réponses B et C. A est bien inversible car on peut expliciter son inverse. En revanche, par définition nilpotente d'ordre 4 veut dire $A^3 \neq O_n$ et $A^4=O_n$, ce n'est pas le cas ici.

18) Une matrice A telle que $A^k=I_n$ pour tout k assez grand est une matrice...
   A) de Gauss
   B) nilpotente
   C) de Newton
   D) aucune de ces réponses

   Réponse D. La définition d'une matrice nilpotente est $A^k=O_n$.

19) Pour pouvoir appliquer la formule du binome de Newton au calcul de $(A+B)^k$, il faut que
   A) A et B soient de même taille
   B) A et B commutent
   C) A ou B soit nilpotente
   D) aucune de ces réponses

   Réponses A et B. On a besoin que l'addition de ces matrices ait un sens, donc qu'elles soient de même taille, mais aussi que la formule soit applicable donc qu'elles commutent. Même si souvent utilisée avec une matrice nilpotente, cette condition n'est pas nécessaire pour appliquer la formule du binôme (voir TD1 exercice 9).

20) Une matrice peut permettre de...
   A) gérer de l'information sous forme d'un tableau
   B) résoudre un système
   C) faire une transformation dans le plan
   D) cuire un oeuf

   Réponses A, B et C. Les matrices ne sont-elles pas merveilleuses ? Transformation dans le plan dans les exercices 21 et 22 du TD2, résolution d'un système dans l'exercice 28 du TD2.