Colle LIPR-10 A1

1 Question de cours

i) Donner le théorème des accroissements finis (théorème 6.9).

ii) Définir "Une fonction f admet un un développement limité au voisinage de a". Quel est son ordre ? (définition 7.1).

iii) Donner la formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit (proposition 6.13).

2 Exercice

a) Etudier en $(0,0)$ les fonctions suivantes. Proposer éventuellement une limite.

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y}.$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

c) Calculer les drivées partielles d'ordre 1 de fog avec $f(x,y,z) = 2xy - 3(x+z)$ et $g(x,y) = (x + y^4, y - 3x^2, 2x^2 - 3y)$. Que vaut la dérivée croisée d'ordre 2 de h ?

Colle LIPR-10 A2

1 Question de cours

i) (proposition 1.2) Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Soient f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$ admettant dérivées partielles par rapport à leur variable x_j. Que peut-on dire pour $f+g$, fg et $\frac{g}{f}$? Soyez précis sur les hypothèses et résultats.

ii) (théorème 5.2) Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et γ une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$. Quelles conditions sont nécessaires et suffisantes pour assurer que $fo\gamma$ soit dérivable en t_0. Donner la forme de cette dérivée.

2 Exercice

a) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Montrer que f' s'annule sur $[a,b]$.

b) Justifier l'existence et calculer les DLs suivants :

   i) En 0 à l'ordre 3 de $cos(x)exp(x)$.

   ii) En 0 à l'ordre 3 de $ln(1+sin(x))$.

   iii) En 1 à l'ordre 3 de $\sqrt{x}$.

Colle LIPR-10 B1

1 Question de cours

i) Soit f une fonction de D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Définir dérivée partielle de f (définition 1.1).

ii) Définir "f est une fonction polynomiale sur R^n".

iii) (théorème 5.2) Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, f une fonction de D dans $\mathbb{R}$ et γ une fonction de I dans $\mathbb{R}^n$. Quelles conditions sont nécessaires et suffisantes pour assurer que $fo\gamma$ soit dérivable en t_0. Donner la forme de cette dérivée.

2 Exercice

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable admettant des limites finies égales en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que f' s'annule.

b) Justifier l'existence et calculer les DLs suivants :

   i) En 0 à l'ordre 4 de $ch(x)cos(x) + sh(x)sin(x)$.

   ii) En 0 à l'ordre 6 de $ln(cos(x))$.

   iii) En 1 à l'ordre 3 de $\exp(\sqrt{x})$.

Colle LIPR-10 B2

1 Question de cours

i) Définir "La fonction f est dérivable à droite" (définition 6.3).

ii) Enoncer l'inégalité des accroissements finis (théorème 6.10).

iii) Donner la formule de Taylor-Young (proposition 7.3).

2 Exercice

a) Etudier en $(0, 0)$ les fonctions suivantes. Proposer éventuellement une limite.

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x}.$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x + y}.$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue. Que peut-on dire des dérivées partielles en $(0, 0)$?

c) Calculer les drivées partielles d'ordre 1 de fog avec $f(x, y, z) = 2xy - 3(x + z)$ et $g(x, y) = (x + y^4, y - 3x^2, 2x^2 - 3y)$. Que vaut la dérivée croisée d'ordre 2 de h ?

Colle LIPR-10 C1

1 Question de cours

i) Définir "La fonction f est dérivable à gauche" (définition 6.4).

ii) Enoncer le théorème de Rolle (théorème 6.8).

iii) Donner les propriétés d'unicité, de troncature et de parité du développement limité (propriétés 7.1).

2 Exercice

a) Etudier en $(0,0)$ la fonction suivante. Proposer éventuellement une limite.

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f = \begin{cases} x^2y^2ln(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue. Montrer que ses dérivées partielles existent et sont continues.

c) Calculer les drivées partielles d'ordre 1 de fog avec $f(x,y,z) = 4x^2 + 3(y-z)$ et $g(x,y) = (x^2 + y^2, y-x, x^3 - 3y^2x)$. Que vaut la dérivée croisée d'ordre 2 de h ?

Colle LIPR-10 C2

1 Question de cours

i) Soit f une fonction de D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Définir dérivée partielle de f (définition 1.1).

ii) Définir ouvert de $\mathbb{R}^n$ étoilé par rapport à un point a (définition 1.6).

iii) (théorème 5.2) Soient D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction de D dans $\mathbb{R}$, a et $v \in \mathbb{R}^n$. Quelles conditions sont nécessaires et suffisantes pour assurer que f admette en a une dérivée dans la direction v ? Donner la forme de cette dérivée.

2 Exercice

a) Soit I un intervalle de R et f une application deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$. On considère trois éléments a, b et x_0 de I vérifiant $a \leqslant x_0 \leqslant b$. Pour $x \in [a, b]$, on pose $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - \lambda(x-a)(x-b).$$

Montrer que l'on peut choisir λ tel que $g(a) = g(x_0) = g(b)$. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \frac{x_0-b}{2} f''(c).$$

b) Justifier l'existence et calculer les DLs suivants :

i) En 0 à l'ordre 4 de $ch(x)cos(x) + sh(x)sin(x)$.

ii) En 0 à l'ordre 4 de $cos(sin(x))$.

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)f(x-y) \leqslant f(x)^2$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)f''(x) \leqslant f'(x)^2$$

Exercice 2

Faire l'étude en 0 de la fonction :

$$f : x \to ln(1 + sin(x))$$

Exercice 3

Calculer les drivées partielles d'ordre 1 de fog avec $f(x,y,z) = 4x^2 + 3(y-z)$ et $g(x,y) = (x^2+y^2, y-x, x^3-3y^2x)$. Que vaut la dérivée croisée d'ordre 2 de h ?

Exercice 4

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction f suivante :

$$f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}.$$

Exercice 5

Déterminer la classe de la fonction suivante sur $\mathbb{R}^2$.

$$f = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$