Colle LIPR-2 A1

1 Question de cours

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$ une application.

a) Donner la définition en langage formel de "f est injective ", illustrer par un exemple.

b) Donner la définition en langage formel de "f est surjective", illustrer par un exemple.

2 Exercice

a) Expliciter le plus possible les sommes suivantes :
   (a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k})$
   (b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$
   (c) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{p} 2^k$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [[0,n]],\ \binom{n}{k}\frac{1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\frac{1}{n+1}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}$$

d) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Colle LIPR-2 A2

1 Question de cours

Soient deux éléments A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Quelle est la condition sur A et B pour pouvoir appliquer la formule du binôme ?

b) Écrire cette formule pour m tel que $m \geqslant 1$.

2 Exercice

Soit I un intervalle et f une application continue sur I et injective. Le but de cet exercice est de montrer que f est strictement monotone sur I.

On fixe deux éléments a et b de I tels que $a < b$. On suppose $f(a) \leqslant f(b)$.

Soient x et y deux éléments de I tels que $x < y$. Pour $t \in [0, 1]$, on pose :

$$g(t) = f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx).$$

a) Démontrer que $f(a) < f(b)$.

b) Montrer que g est continue sur I et ne s'annule pas.

c) Déterminer le signe de $g(0)$ et celui de $g(1)$.

d) En déduire que f est strictement croissante.

e) Que dire si $f(a) > f(b)$?

Colle LIPR-2 B1

1 Question de cours

Soit $A \in \mathcal{M}_{38,12}(\mathbb{K}), A = (a_{i,j})$ et $B \in \mathcal{M}_{12,20}(\mathbb{K}), B = (b_{i,j})$.

a) Donner la taille de la matrice AB

b) Donner la formule du coefficient d'indice (7,2) de AB

2 Exercice

Soient E, F et G des ensembles. On a les applications f de E dans F et G de F dans G.

a) Montrer que si gof est injective alors f est injective.

b) Montrer que si gof est injective, g n'est pas nécessairement injective.

c) Montrer que si gof est surjective alors g est surjective.

d) Montrer que si gof est surjective alors f n'est pas nécessairement surjective.

e) Que dire à propos des fonctions gof bijectives ?

Colle LIPR-2 B2

1 Question de cours

Soient E et F deux ensembles.

(a) Expliquer la différence entre "fonction" et "application".

(b) Soit $f : E \to F$ une application. Donner la définition en langage formel de "f est bijective ".

2 Exercice

a) On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si la somme des coefficients sur chaque colonne de A est égale à 1. Démontrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique pour $n = 2$.

b) Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

c) Trouver une matrice triangulaire supérieure M telle que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Colle LIPR-2 C1

1 Question de cours

Donner les formules pour le calcul des sommes arithmétiques, géométrique et celle pour le calcul du binome de Newton.

2 Exercice

a) Soit A, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que tous les coefficients valent 1. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

b) Soit $B = (b_{i,j})$, la matrice carré de taille n définie par $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer B^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Colle LIPR-2 C2

1 Question de cours

Donner la définition de l'ordre d'une matrice nilpotente $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

a) Sans étudier les variations de f, répondre aux questions suivantes :

   i) f est-elle injective ? surjective ?

   ii) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

   iii) Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $x \to f(x)$ est une bijection.

b) Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ Trouver toutes les matrices B qui commutent avec A.

Exercice 2

a) Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $\forall k \in \mathbb{N},\ J^k$. Que dire de J ?

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Donner une relation entre $A,\ J$ et une matrice diagonale. En déduire la valeur de $A^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

a) Donner un exemple de couple de matrices qui ne vérifie pas la formule du binôme.

b) Déterminer deux éléments A et B de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$A^2 + \lambda A + \mu I_2 = O_2.$$

Chercher à expliquer d'où viennent ces deux réels.

Exercice 4

Trouver une matrice triangulaire supérieure M telle que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$