Colle L1PR-3 A1

1 Question de cours

a) Donner la définition mathématique de "f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$".

b) Donne une fonction f continue sur $I = \mathbb{R}$, sa dérivée g et une de ses primitives F sur ce même intervalle.

2 Exercice

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $A + A$ et $A \times A$.

b) Montrer que la matrice A est inversible.

c) Calculer son inverse de deux manières différentes.

Colle L1PR-3 A2

1 Question de cours

Simplifier si possible les égalités suivantes concernant A et B deux matrices de taille n et $\lambda \in \mathbb{N}$ en utilisant les déterminants et les commatrices de A et B : $det(AB)$, $det(A+B)$, $det({}^tA)$, $det(\lambda A)$, $det(A^\lambda)$ et $det(A^{-1})$.

2 Exercice

(Adapté de l'épreuve maths bac S 2014 France métropolitaine, exercice 1).

a) On définit la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = x + \exp(-x).$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C_1 la courbe représentative de la fonction f_1.

  i) Justifier que C_1 passe par le point A de coordonnées $(0; 1)$.

  ii) Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1.

b) L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$I_n = \int_0^1 x + \exp(-nx)dx.$$

1. Démontrer que la suite (I_n) est convergente.
2. Donner l'expression de I_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (I_n).

Colle L1PR-3 B1

1 Question de cours

a) Qu'est ce que l'ordre d'une équation différentielle ?

b) Définir "équation différentielle du premier ordre à coefficients constants". Donner les formes des solutions de telles équations.

2 Exercices

Exercice 1 :

a) Calculer $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) Étudier les variations de F.

Exercice 2 : (Adapté de l'épreuve maths bac S 2011 Centres Etrangers exercice 4 partie 2).
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \exp(1-x) dx.$$

a) Calculer la valeur exacte de I_0.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n.$$

c) En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

Colle L1PR-3 B2

1 Question de cours

a) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Donner la définition mathématique de "F est une primitive de f".

b) Combien f possède t'elle de primitives ? Justifier.

2 Exercice

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $A + A$ et $A \times A$.

b) Montrer que la matrice A est inversible.

c) Calculer son inverse de deux manières différentes.

Colle L1PR-3 C1

1 Question de cours

a) Donner les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I précisé :

   i) $\cos(x)$ sur $I = \mathbb{R}$

   ii) $\frac{1}{x}$ sur $I =]-\infty, 0[$

b) Donner la formule d'intégration par parties. Attention à préciser les hypothèses faites sur les fonctions impliquées.

2 Exercice

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans lui même, non nulle telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

a) Émettez une hypothèse sur la nature de f.

b) On fixe $u \in \mathbb{R}$ et on pose g telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = f(x + u).$$

Calculer $g'(0)$ de deux manières différentes.

c) En déduire une relation en f' et f.

d) Résoudre et conclure.

Colle L1PR-3 C2

1 Question de cours

a) Donner la définition du déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}n(\mathbb{R})$.

b) Donner la formule pour inverser une matrice en fonction des cofacteurs.

2 Exercice

(Adapté de l'épreuve maths bac S 2012 Pondichéry, exercice 3).
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\exp(-nx)}{1+x} dx.$$

$$J_n = \int_0^1 \frac{\exp(-nx)}{(1+x)^2} dx.$$

a) Démontrer que (I_n) est décroissante.

b) i) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout nombre réel $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant \frac{\exp(-nx)}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\exp(-nx)}{(1+x)} \leqslant \exp(-nx)$$

ii) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes.

iii) Déterminer leur limite.

c) i) Montre que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}(1 - \frac{\exp(-n)}{2} - J_n).$$

ii) En déduire la limite de (nI_n) quand n tend vers $+\infty$.

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

(Adapté de l'épreuve maths bac S 2015 Liban, exercice 2).
On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

a) Calculer u_0.

b) Calculer $\forall n$, $u_{n+1} + u_n$. En déduire la valeur exacte de u_1.

c) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

   i) Variables : i et n sont des entiers naturels.
   u est un réel

   ii) Entrée : Saisir n

   iii) Initialisation : Affecter à u la valeur [à compléter]

   iv) Traitement : Pour i variant de 1 à [à compléter]
   Affecter à u la valeur [à compléter]
   Fin de Pour

   v) Sortie : Afficher u

d) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

e) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

f) On appelle l la limite de la suite (u_n). Démontrer que $l = 0$.

Exercice 2

Déterminer les solutions à valeurs réelles de :

$$y'' - 3y' + 2y = (6x - 5)\exp(-x).$$

Exercice 3

Résoudre :

$$y'' + 2y' + 2y = x^2 + x + 1.$$