Colle L1PR-4 A1

1 Question de cours

a) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Donner la définition de F, sous-espace vectoriel de E. Quels sont les sous-espaces vectoriels dits triviaux ?

b) Donner un exemple de sous-espace vectoriel. Justifier votre exemple.

2 Exercice

On considère la fonction f donnée par :

$$f(x) = arcsin(\frac{2x}{1+x^2}) - 2arctan(x)$$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier la parité de f.

c) Calculer la valeur de f aux points suivants : $0, 1$ et $\sqrt{3}$. Donner sa limite "à droite de son ensemble de définition".

d) Calculer sa dérivée.

e) Reformuler f sur $[0, 1]$.

Colle L1PR-4 A2

1 Question de cours

a) Donner le domaine de définition de la fonction arctangente. Calculer sa dérivée.

b) Dessiner les graphes des fonctions tangente et arctangente en faisant apparaitre les limites et valeurs particulières que vous connaissez. Attention à la propreté.

2 Exercice

a) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par

$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

Montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On l'appelle complexifié de E.

b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

$$F + G = F \cap G \Leftrightarrow F = G$$

Colle L1PR-4 B1

1 Question de cours

Dire, sans justifier, si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, corrigez-les.

a) La fonction arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $tan(x) = tan(y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + k\pi$

c) $\forall x \in [-1, 1]$, $tan(artan(x)) = x$

d) La fonction arctan est paire

e) La dérivée de la fonction arctan est paire

f) $\forall x \in [-1/2, 0]$ $cos(arccos(x)) = x$

2 Exercices

1. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b)$ ã$, b \in \mathbb{R}\}$.
   i) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   ii) Déterminer$F \cap G$.
2. Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Comparer :
   i) $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.
   ii) $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

Colle L1PR-4 B2

1 Question de cours

a) Donner la définition d'un espace vectoriel E.

b) Donner un exemple d'espace vectoriel SANS justifier.

2 Exercice

1. Soit :
$$f_a(x) = arctan(\frac{a+x}{1-ax})$$
   a) On suppose a>0. Etudier cette fonction sur son domaine de définition.

   b) Idem pour a<0.

2. Soient a et b deux réels tels que $ab \neq 1$. Montrer que :
$$arctan(a) + arctan(b) = arctan(\frac{a+b}{1-ab}) + \lambda\pi$$
   où λ est donné tel que :
$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } ab < 1 \\ 1 & \text{si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ -1 & \text{si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

Colle L1PR-4 C1

1 Question de cours

a) Donner sans justifier trois exemples fondamentaux d'espaces vectoriels (section 4.2 du cours).

b) Donner un exemple d'un ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Justifier.

2 Exercice

a) Soit $\theta = arctan(1/5)$. Calculer $tan(4\theta - \frac{\pi}{4})$. En déduire la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4arctan(1/5) - arctan(1/239).$$

b) On souhaite montrer la formule de Machin d'une autre manière. Pour cela on pose $z = (5-i)^4(1+i)$, $a = arctan(\frac{1}{5})$ et $b = arctan(\frac{1}{239})$.

i) Montrer que $-a$ est un argument de $5 - i$

ii) Montrer que $-b$ est un argument de z

iii) En déduire la formule de Machin modulo 2π.

iv) En démontrant que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$arctan(\frac{1}{n}) \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

déduire la formule de Machin.

Colle L1PR-4 C2

1 Question de cours

Donner les domaines de départ et d'arrivée ainsi que les dérivées des fonctions arcsin et arccos.

2 Exercice

1. Soit $F = (u_n) \in \mathbb{R}^N$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel que l'on précisera.
2. Les parties de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ? Justifier.
   i) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f est monotone$\}$
   ii) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f s'annule en 0$\}$
   iii) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f s'annule$\}$
   iv) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ / f est impaire$\}$

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Soit E, l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires.

1. Montrer que P et I munis de structures bien choisies sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Montrer que $P \bigoplus I = E$

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $arcsin(x) + arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $u = sin(arctan(x))$ et $v = cos(arctan(x))$. Déterminer le signe de v. Puis à l'aide de $\frac{u}{v}$ et $u^2 + v^2$ déterminer des expressions de u et v en fonction de x sans passer par les formules trigonométriques.

Exercice 3

Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\omega\mathbb{R} = \{\omega x \ / \ x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. À quelle condition $\omega\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 4

SoientF, G, F_0, G_0 des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F_0 \cap G_0$. Montrer que

$$(F + (G \cap F_0)) \cap (F + (G \cap G_0)) = F.$$