Colle L1PR-5 A1

1 Question de cours

a) Donner la définition mathématique d'une équation différentielle d'ordre n.

b) Définir une "équation différentielle homogène".

c) Donner la forme des solutions d'équations du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

2 Exercice

Soient :

$$E = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; 2x + y - z = 0 \text{ et } x + 2y + z = 0\Big\}$$
$$F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; 2x - 3y + z = 0\Big\}$$

On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $a = (1, -1, 1)$, $b = (-2, -1, 1)$ et $c = (-1, 0, 2)$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer une famille génératrice de E. Prouver que c'est une base.

c) Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F. Est-ce la seule ?

d) Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Montrer que c'est une base.

e) Exrimer $u = (x, y, z)$ dans $\{a, b, c\}$.

Colle L1PR-5 A2

1 Question de cours

a) Définir les termes suivants : famille liée, famille libre, famille génératrice.

b) Faire une phrase vraie reliant ces termes.

2 Exercice

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans $[0, +\infty]$ l'équation différentielle :

$$(E)\ y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$$

1. On note $y_0(x) = \alpha x$, déterminer $\alpha > 0$ pour que y_0 soit une solution particulière de (E).

2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par z telle que $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$.

3. Résoudre (E') sur $]0, +\infty]$.

4. Résoudre (E) sur $]0, +\infty]$.

Colle L1PR-5 B1

1 Question de cours

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, corrigez-les et prouvez-les.

a) Toute famille extraite d'une famille libre est libre.

b) Toute famille contenant le vecteur nul est libre.

c) Toute famille réduite à un unique vecteur non nul est liée.

d) Toute famille constituée de deux vecteurs non colinéaires est liée.

2 Exercices

a) Déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle :

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$$

b) Soit $a > 0$ et l'équation $y' = a\,|y|$. On suppose f solution.

i) Qualifier l'équation (linéaire ? homogène ? ordre ?...).

ii) Etudier les variations de f.

iii) On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer que $f > 0$.

iv) On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < 0$. Montrer que $f < 0$.

v) Résoudre l'équation.

Colle L1PR-5 B2

1 Question de cours

Expliquer la méthode de la variation de la constante pour une équation :

$$ay'(t) + by(t) = c$$

où une solution du système homogène est donnée par

$$z_h(t) = Kz(t)$$

Veillez à être clair.

2 Exercice

Soit $E = Vect(a, b, c, d)$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ avec :

$$a = (2, -1, -1);\ b = (-1, 2, 3);\ c = (1, 4, 7);\ d = (1, 1, 2)$$

a) Est-ce que (a, b, c, d) forme une base de $\mathbb{R}^3$?

b) Montrer que (a, b) est une base de E.

c) Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.

d) Compléter une base de E en base de $\mathbb{R}^3$.

Colle L1PR-5 C1

1 Question de cours

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, corrigez-les. a, b et K sont des constantes.

a) La méthode de la variation de la constante permet de trouver les solutions d'une équation sans second membre.

b) L'équation $(1-x)z'(x) + z''(x)z(x) = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

c) Le principe de superposition dit que la solution y de l'équation $y'(x) = f_1(x) + f_2(x)$ est donnée par $y = y_1 + y_2$ où y_1 est solution de $y_1'(x) = f_1(x)$ et y_2 est solution de $y_2'(x) = f_2(x)$

d) Le principe de superposition dit que la solution y de l'équation $y'(x) + y(x) = f_1(x) + f_2(x)$ est donnée par $y = y_1 + y_2$ où y_1 est solution de $y_1'(x) = f_1(x)$ et $y_2(x)$ est solution de $y_2(x) = f_2(x)$

e) La solution des équations différentielles de la forme $ax'(t) + bx(t) = 0$ est toujours de la forme $x_e(t) = Ke^{-at}$ si elle existe.

2 Exercice

On pose $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (0, 1, 2)$.

a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

b) Montrer que $F = Vect(u_1, u_2)$ et $G = Vect(u_3)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer des équations caractérisant F et G.

Colle L1PR-5 C2

1 Question de cours

a) Définir les termes suivants : vecteurs colinéaires, sous-espace engendré par une famille de vecteurs, base canonique.

b) Quel est le lien entre une base de E, espace vectoriel, et un vecteur de E ? Ce lien est-il vrai pour toute famille libre de E ?

2 Exercice

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $f'(x) + f(x) = f(0)$ sur $[0, 1]$.

b) $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0, +\infty[$.

c) $y' - y = x^k e^x$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' - (2x - \frac{1}{x})y = 1$ sur $]0, +\infty[$.

b) $y' - y = x^k e^x$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Trouver toutes les solutions sur $[0, 1]$ de l'équation (E) :

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$$

Exercice 3

On considère l'équation :

a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x$$

b) Trouver une solution particulière de (E), puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

c) Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.

d) Soit f, deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ vérifiant (E') :

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\log(t)$$

- i) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
- ii) En déduire une expression de f.

Exercice 4

Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.