Colle LIPR-6 A1

1 Question de cours

a) Donner la définition mathématique d'un polynôme formel à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Quel est son degré ?

b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul et soit z un complexe non réel racine de P.

   i) Montrer que $\bar{z}$ est aussi racine de P.

   ii) Montrer qu'il existe un polynôme réel de degré 2 qui divise P.

2 Exercice

a) Soit $(e_i)_{i\in\{1\cdots 3\}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille suivante forme une base de $\mathbb{R}^3$. préciser la dimension de $Vect(v_1, v_2, v_3)$ et les coordonnées du vecteur e_3 dans cette nouvelle base.

$$v_1 = e_1 + e_2$$
$$v_2 = e_2 + e_3$$
$$v_3 = e_1 + e_3$$

b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in N$. Montrer que si $dim(F) + dim(G) > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.

c) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel muni d'une base $e = (e_1, \cdots, e_n)$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $v_i = e_1 + \cdots + e_i$. Montrer que les v_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$ forment une base de E. Donner les coordonnées d'un vecteur dans cette nouvelle base.

Colle LIPR-6 A2

1 Question de cours

Compléter les phrases suivantes sans changer les termes/symboles déjà écrits ! Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_p)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \cdots, g_q)$ alors :

a) Si $F \cap G$ vérifie $\cdots$, alors on peut affirmer que ces sous-espaces vectoriels sont en somme directe.

b) les sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si la famille de vecteurs $\cdots$ vérifie $\cdots \Rightarrow \cdots$.

c) $F + G = E$ si, et seulement si, la famille $\cdots$ est $\cdots$.

d) Les propriétés 2 et 3 nous permettent de conclure que F et G sont $\cdots$ si et seulement si la famille "concaténée" $(f_1, \cdots, f_p, g_1, \cdots, g_q)$ $\cdots$.

2 Exercice

a) Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2X + 3$.

b) Les restes de la division euclidienne du polynôme A par $(X-1)$, $(X-2)$ et $(X-3)$ sont respectivement 3, 7 et 13. Calculer le reste de la division de A par $(X-1)(X-2)(X-3)$.

c) Déterminer a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $Q = X^2 - aX + 1$ divise $P = X^4 - X + b$.

d) Déterminer les nombres a et b pour que

$$P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$$

soit le carré d'un polynôme que l'on précisera.

Colle LIPR-6 B1

1 Question de cours

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, prouvez-les. Soient F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (sans autre supposition particulière sur eux). On peut alors affirmer que :

a) $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E, d'autre part, c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

b) $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, d'autre part, c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

c) $F + G = F \bigoplus G \Leftrightarrow F \cup G = \{0\}$

d) Si $F + G = E$ alors on dit que F et G sont supplémentaires de E.

e) On dit que H est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si H muni des mêmes lois que E (addition et multiplication externe) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2 Exercice

a) Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$.

b) Soient α, β et γ, les racines de $P = X^3 - 5X^2 + 6X - 1$. Déterminer de deux manières différentes la valeur exacte de $A = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\beta} + \frac{1}{1-\gamma}$.

c) Soient a et $b \in \mathbb{K}$ distincts et P un polynôme. Donner le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Colle LIPR-6 B2

1 Question de cours

a) Donner la définition mathématique d'un polynôme unitaire.

b) Donner la définition mathématique d'un polynôme irréductible.

c) Donner la définition mathématique de A divise B avec A et B dans $\mathbb{K}[X]$.

d) Soient P, Q et R dans $\mathbb{K}[X]$ tels que P irréductible et P divise QR. Peut-on affirmer que P divise Q ?

2 Exercice

a) Soit $(e_i)_{i\in\{1\cdots 3\}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille suivante forme une base de $\mathbb{R}^3$. préciser la dimension de $Vect(v_1, v_2, v_3)$ et les coordonnées du vecteur e_2 dans cette nouvelle base.

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ v_2 &= e_2 - e_1 \\ v_3 &= e_1 - e_3 \end{aligned}$$

b) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que :

$$F \cap G \neq \{0\}\,.$$

c) Soit $(e_i)_{i\in\{1\cdots n\}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit des vecteurs v_i comme suit :

$$\begin{cases} v_i = e_i + e_{i+1} \text{ si } i \in \{1 \cdots n\} \text{ est impair} \\ v_i = e_i - e_{i-1} \text{ si } i \in \{1 \cdots n\} \text{ est pair} \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que les v_i forment une base. Exprimer un vecteur v quelconque dans cette nouvelle base en fonction de ses coordonnés dans la base canonique.

Colle LIPR-6 C1

1 Question de cours

Soient P et Q deux éléments non-nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Compléter les phrases suivantes.

a) On peut borner $deg(P+Q)$, en effet $\cdots$

b) Le cas d'égalité de la propriété précédente est vérifiée si $\cdots$

c) $deg(\lambda P) = deg(P)$ si, et seulement si $\cdots$

d) Si P est de degré n alors $P^{(n+1)}$ est $\cdots$

e) On dit que P est irréductible si $\cdots$

f) On suppose que $deg(Q) < deg(P)$ alors le théorème de division euclidienne donne que $\cdots$

2 Exercice

a) Soit $(e_i)_{i\in\{1\cdots3\}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille suivante forme une base de $\mathbb{R}^3$. préciser la dimension de $Vect(v_1, v_2, v_3)$ et les coordonnées du vecteur e_1 dans cette nouvelle base.

$$v_1 = e_1 - e_2$$
$$v_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$$
$$v_3 = e_1 + e_3$$

b) Donner une famille libre de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas une base. Donner une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas une base. Dans les deux cas préciser leur dimension.

c) Nous souhaitons montrer un lemme connu appelé le lemme d'échange. Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E. Montrer qu'il existe $j \in \{1 \cdots n\}$ tel que la famille $(e_1, \cdots, e_{n-1}, f_j)$ soit encore une base de E.

Colle LIPR-6 C2

1 Question de cours

a) Donner la définition mathématique de E, $\mathbb{K}$ espace vectoriel est de dimension finie.

b) Donner la définition mathématique de la base canonique de E.

c) Énoncer la formule de Grassman.

d) Si $dim(F) < dim(E)$ pour F, $\mathbb{K}$-espace vectoriel, peut-on dire que F est un sous-espace vectoriel de E ?

2 Exercice

a) Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$.

b) Montrer que $P(X) = X(X+a)(X+2a)(X+3a)+a^4$ est le carré d'un polynôme que l'on précisera. En déduire la factorisation sur $\mathbb{R}$ de $P_0(x) = X(X+1)(X+2)(X+3) - 8$.

c) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

d) Soient $a \in \mathbb{K}$ distincts et P un polynôme. Donner le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

a) Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ et $B = X^2 - 5X + 4$.

b) À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$, le polynôme

$$X^4 + aX^2 + bX + c$$

est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 2

a) Montrer que les racines complexes de $X^3 - X + 1$ sont simples sans les calculer.
On les note a, b et c. Calculer :

i) $a + b + c$

ii) $a^2 + b^2 + c^2$

iii) $a^3 + b^3 + c^3$

iv) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$

b) Trouver les solutions du système suivant :

$$x + y + z = 11 \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 49 \tag{3}$$
$$x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1 \tag{4}$$

Exercice 3

a) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{13}$ de dimension 7. Montrer que :

$$F \cap G \neq \{0\}.$$

b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si l'on suppose deux des propriétés suivantes vraies, alors la troisième l'est aussi :

(i) $F \cap G = \{0\}$

(ii) $F + G = E$

(iii) $dim(F) + dim(G) = dim(E)$