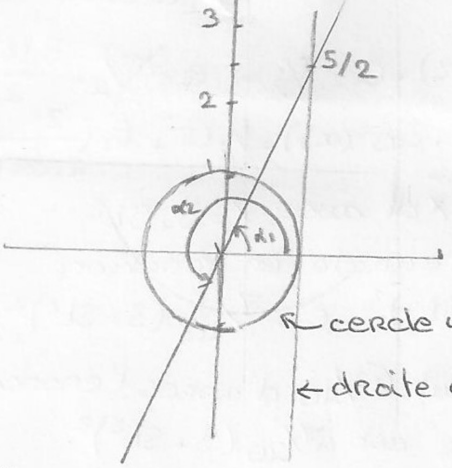
Correction examen pré CC2

Question 1

① On utilise la méthode vue en cours et en TD avec la droite des tangentes



α_1 et α_2 ont tous les deux une tangente valant $5/2$ d'après le cours. Ici l'énoncé demande l'angle obtus donc seul α_2 convient.

Comme α_2 est obtus et $\tan(\alpha_2) = 5/2$

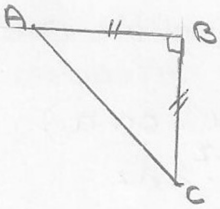
$\Rightarrow \alpha_2 = \arctan(5/2) + \pi$

← cercle unité de rayon 1

← droite des tangentes

② D'après le cours $\arctan(-1/\sqrt{3}) = -\arctan(1/\sqrt{3}) = -\pi/6$

③ Convient :



Le triangle ABC est rectangle en B donc $\tan(\hat{A}) =$ "opposé sur adjacent" $= \frac{BC}{AB}$
or $\tan(A) = 1$ par hypothèse donc tout triangle tel que $BC = AB$ convient ie tout triangle rectangle et isocèle en B.

Il existe plusieurs méthodes pour faire la 2eme partie de la question.
Notons avant tout que :
- ABC est un triangle rectangle en B $\Rightarrow \hat{B} = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad
- ABC est un triangle $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° = \pi$ rad

Méthode 1 : ABC est isocèle en B donc $\hat{A} = \hat{C}$ et $\hat{A} + \hat{C} = \pi - \hat{B} = \pi/2 \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = \pi/4$

Méthode 2 : $\hat{A} + \hat{C} = \pi - \hat{B} = \pi/2$ et $\hat{A}$ et $\hat{C}$ sont positifs donc se sont des angles aigus
Or $\tan(\hat{A}) = 1 \Rightarrow \hat{A} = \arctan(1) = \pi/4$

pour calculer $\hat{C}$: soit on utilise $\hat{C} = \pi - \hat{A} - \hat{B} = \pi - \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$
soit on utilise $\tan(\hat{C}) = \frac{AB}{BC}$ or $AB = BC \Rightarrow \tan\hat{C} = 1$
et $\hat{C}$ est un angle aigu d'où $\hat{C} = \arctan(1) = \pi/4$

En résumé $\hat{B} = \pi/2$ et $\hat{A} = \hat{C} = \pi/4$

Question 2

① $(x)' = 1$ ② $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$ ③ Une infinité (toutes les fonctions $\ln(x) + C$) $C \in \mathbb{R}$

④ $\int \cos(x) + \sin(x)\,dx = \sin(x) - \cos(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. on nous demande les primitives de cette fonction donc la constante C est importante

⑤ Cela ressemble à une primitive de la forme $\int X'/X\,dx$ avec $X = 74 + e^{3x}$
Or $X = 74 + e^{3x}$ implique $X' = 3e^{3x}$, on ajuste donc l'intégrale en faisant $\frac{1}{3}.3$
$\hookrightarrow \int \frac{e^{3x}}{74+e^{3x}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3e^{3x}}{74+e^{3x}}\,dx = \frac{1}{3}\ln(|74+e^{3x}|) = \frac{1}{3}\ln(74+e^{3x})$ $+C$ d'après le formulaire
avec $C \in \mathbb{R}$

⑥ Cela ressemble à une primitive de la forme $\int X'/X \, dx$ avec $X = 2+\cos^2(x)$
$X = 2+\cos^2(x) \Rightarrow X' = -2\sin(x)\cos(x)$, on ajuste donc l'intégrale en fonction
$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{2+\cos^2(x)}dx = -1/2\int \frac{-2\sin(x)\cos(x)}{2+\cos^2(x)}dx = -1/2 \ln(2+\cos^2(x)) + C, C\in\mathbb{R}$$
d'après le formulaire. En $x = \pi/2$ on a alors $-1/2\ln(2)+C = \pi/2 \Rightarrow C = \pi/2 + \frac{\ln(2)}{2}$
La primitive recherchée est donc $1/2(\pi + \ln(2) - \ln(2+\cos^2(x))) = 1/2\left(\pi + \ln\left(\frac{2}{2+\cos^2(x)}\right)\right)$

⑦ Cela ressemble à une primitive de la forme $\int X'X\,dt$ avec $X = 3+5t^2$
Or $X = 3+5t^2$ implique $X' = 10t$, on ajuste donc l'intégrale en fonction
$$\int 7t(3+5t^2)dt = \frac{7}{10}\int 10t(3+5t^2)\,dt = 7/10 \cdot 1/2 \cdot (3+5t^2)^2 + C = 7/20\,(3+5t^2)^2 + C$$
avec $C\in\mathbb{R}$ d'après le formulaire.
En $t=0$ on a $7/20(3+5\cdot0^2)^2 + C = 63/20 + C$ or cela vaut $63/20$ d'après l'énoncé
On en déduit que $C=0$ et que la primitive recherchée est $7/20\,(3+5t^2)^2$.

⑧ TD3, ex 9, i : la primitive est $-\ln(|\cos x|)$

⑨ TD3, ex 10, c : par intégration par parties les primitives sont données par
$-x + (x+1)\ln(x+1) + C$, $C\in\mathbb{R}$

⚠ les résultats des TDs sont à savoir retrouver rapidement

⑩ TD3, ex 13 : grâce à une double intégration par parties on a :
$$\int z^2e^{-z}dz = -z^2e^{-z} + \int 2ze^{-z}dz = -z^2e^{-z} - 2ze^{-z} - \int e^{-z}2\,dz$$
$$= -z^2e^{-z} - 2e^{-z}(z+1)$$

Question 3

① Avec t en années et $N(t)$ le nombre d'habitants on a :
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = \frac{N(2011)-N(2007)}{4} = \frac{2.2\cdot10^6}{4} = 5{,}5\cdot10^5$$

② ⓐ $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$ est le taux instantané d'accroissement. Il est égal à la dérivée $y'(t)$ lorsque l'on peut considérer Δt suffisamment petit

ⓑ $y'(t) \sim \frac{\Delta y}{\Delta t} = K\exp(\lambda t)$ d'après l'énoncé. En primitivant on a
$y(t) = \int y'(t)\,dt = K\int \exp(\lambda t)dt = K/\lambda \exp(\lambda t) + C$, $C\in\mathbb{R}$

ⓒ On a $y(0) = K/\lambda \exp(\lambda\cdot 0) + C = K/\lambda + C$ or d'après l'énoncé $y(0) = 10$
Donc $C = 10 - K/\lambda$ et $y(t) = K/\lambda\exp(\lambda t) + 10 - K/\lambda = K/\lambda(\exp(\lambda t)-1)+10$
au bout de 3 ans, $y(3) = K/\lambda(\exp(3\lambda)-1)+10$

Question 4

① On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = K$, $K\in\mathbb{R}$
vérifiant $y_p'(x) + 2y_p(x) = 3 \Leftrightarrow 2K = 3 \Leftrightarrow K = 3/2$
une solution particulière est $y_p(t) = 3/2$
On cherche les solutions de l'équation homogène associée : $y_h'(x) + 2y_h(x) = 0$
D'après le formulaire elles sont toutes sous la forme $y_h(x) = C\exp(-2t)$
$C\in\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions est donc donné par
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C\exp(-2t) + 3/2,\ C\in\mathbb{R}$$

La solution unique vérifiant $y(0)=-1$ est $y(t)=-5/2\exp(-2t)+3/2$

En effet $y(0)=C.\exp(-2.0)+3/2=C+3/2$ or $y(0)=-1$ d'après l'énoncé $\Rightarrow C=-5/2$

② On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t)=K\arctan(x)(1+x^2)$ avec $K\in\mathbb{R}$. Cela implique $y_p'(t)=2Kx\arctan(x)+K$ qui est solution de $(1+x^2)\,y_p'(x)-2x\,y_p(x)=1+x^2$ (E)

$\Leftrightarrow (1+x^2)(2Kx\arctan(x)+K)-2x(K\arctan(x)(1+x^2))=1+x^2$

$\Leftrightarrow (2Kx-2Kx)\arctan(x)+K=1 \quad \Leftrightarrow K=1$

Une solution particulière de l'équation (E) est donc $y_p(x)=\arctan(x)(1+x^2)$

On cherche les solutions de l'équation homogène associée

(E_H) $(1+x^2)\,y_h'(x)-2x\,y_h(x)=0 \Leftrightarrow y_h'(x)-\dfrac{2x}{1+x^2}y_h(x)=0$

On a $a(x)=-\dfrac{2x}{1+x^2}$ donc $A(x)=\int a(x)\,dx=-\ln(1+x^2)$

Et donc d'après le formulaire les solutions de (E_h) sont de la forme

$y_h(t)=C\exp(\ln(1+x^2))=C(1+x^2)$ avec $C\in\mathbb{R}$

L'ensemble des solutions est donné par $y(t)=C(1+x^2)+\arctan(x)(1+x^2)$

$=(1+x^2)(\arctan(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$

Question 5

① Angle aigu : angle du demi plan $x\geq 0$

② Arctan est la fonction telle que $y=\arctan(x)\Leftrightarrow \tan(y)=x$ et $y\in]-\pi/2\,\pi/2[$

les propriétés possibles : $\arctan(-x)=-\arctan(x)$

$\arctan(x)+\arctan(1/x)=\text{signe}(x).\pi/2$

$\arctan'(x)=(1+x^2)^{-1}$

$\arctan(0)=0$

$\arctan(1/\sqrt{3})=\pi/6$ $\arctan(1)=\pi/4$ $\arctan(\sqrt{3})=\pi/3$

③ $\int\exp(\lambda t)\,dt=1/\lambda\exp(\lambda t)$

④ Equation differentielle sans second membre ie de la forme

$y'(t)+a(t)\,y(t)=0$