Une correction de l'exercice 6

① L'énoncé donne : " le taux de variation de la température d'un objet est proportionnel à la différence de température entre l'objet et le milieu ambiant". Or grâce au cours on sait que l'on peut assimiler taux de variation ($\Delta T/\Delta t$) et dérivée ($T'(t)$) d'une fonction donnée pour Δt assez petit ce que l'on suppose ici. Le coefficient de proportionnalité étant noté k, on a finalement :

$$\underline{T'(t) = k(Ta - T(t))}, \quad k > 0 \quad (\mathcal{E})$$

On vérifie que la formule est cohérente. En effet si un objet de température $T(t)$ est mis au contact d'une surface plus froide Ta (ie $Ta < T(t)$) alors, d'après $(\mathcal{E})$, $T'(t) < 0$ et la température de l'objet va décroître. Cela semble en accord avec notre expérience de la Réalité

⑪ Equation homogène de $(\mathcal{E})$: $T_h'(t) + k T_h(t) = 0 \Rightarrow T_h(t) = C e^{-kt}$, $C \in \mathbb{R}$

Solution particulière de $(\mathcal{E})$: on cherche une solution particulière constante ie $T_p(t) = \alpha \in \mathbb{R}$. Cela implique $T_p'(t) = 0$. On évalue $(\mathcal{E})$ en T_p

↳ $0 = k(Ta - \alpha) \Rightarrow \alpha = Ta$.

On a donc $\underline{T_p(t) = Ta}$.

Solutions de $(\mathcal{E})$: $S = \{ T_h(t) + T_p(t) = C e^{-kt} + Ta, \; C \in \mathbb{R} \}$

Détermination de la température : on sait d'après l'énoncé que $T(0) = To$

Or $T(0) = C e^{-k0} + Ta$. D'où $To = C + Ta \Leftrightarrow C = To - Ta$

La température est in fine donnée par $\underline{T(t) = (To - Ta) e^{-kt} + Ta}$

⑪ La solution homogène est la même que celle donnée en ⑪. Cependant ici on ne peut pas trouver une solution particulière constante. On va la chercher sous la forme $T_p(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow T_p'(t) = -\omega\alpha \sin(\omega t) + \omega\beta \cos(\omega t)$$

On évalue $(\mathcal{E})$ en T_p : $(k\beta - \omega\alpha)\sin(\omega t) + (k\alpha + \beta\omega)\cos(\omega t) = kTm \sin(\omega t)$

On a donc, en identifiant coefficient par coefficient :

$$\begin{array}{l} (\sin(\omega t)) \\ (\cos(\omega t)) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} k\beta - \omega\alpha = kTm \\ k\alpha + \beta\omega = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega^2\beta + k^2\beta = k^2 Tm \\ k^2\alpha + \omega^2\alpha = -\omega k Tm \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \beta = \dfrac{k^2}{k^2+\omega^2} Tm \\ \alpha = -\dfrac{k\omega}{k^2+\omega^2} Tm \end{array} \right.$$

On peut noter $\gamma = \dfrac{k}{k^2+\omega^2}$ et alors $\left\{ \begin{array}{l} \beta = \gamma k Tm \\ \alpha = -\omega\gamma \, Tm \end{array} \right.$

alors $T_p(t) = -\omega\gamma Tm \cos(\omega t) + Tm\gamma k \sin(\omega t)$

Ainsi $S = \left\{ T_h(t) + T_p(t) = C e^{-kt} + Tm \dfrac{-\omega k}{k^2+\omega^2} \cos(\omega t) + Tm \dfrac{k^2}{k^2+\omega^2} \sin(\omega t) \quad C \in \mathbb{R} \right\}$

On sait que $To = T(0) = \dfrac{-\omega k Tm}{\omega^2+k^2} + C \Rightarrow C = To + \dfrac{\omega k Tm}{\omega^2+k^2} = To + \omega\gamma \, Tm$

Et donc la température est ici donnée par

$$\underline{T(t) = (To + \omega\gamma \, Tm) e^{-kt} - Tm\omega\gamma \cos(\omega t) + Tm\gamma k \sin(\omega t)}$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{k}{k^2+\omega^2}$$