Colle L2PR-1 A1

1 Question de cours

a) Enoncer la formule de Taylor-Young en x_0 pour une fonction f suffisamment dérivable (les hypothèses de dérivabilité sur f sont à rappeler de manière précise).

b) Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions exp(x) et ln(1+x).

2 Exercice

a) Soit A, une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{K}^+$.

i) Montrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$A^2 + \lambda A + \mu I_2 = O_2.$$

Essayer de trouver une interprétation à la valeur de ces réels.

ii) Supposons que $det(A) \neq 0$, calculer A^{-1} en fonction de A.

iii) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ Trouver toutes les matrices B qui commutent avec A.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

i) Calculer $det(B)$, $tr(B)$ et B^n.

ii) La relation précédente s'écrit pour M une matrice de taille 3×3 :

$$M^3 - tr(M)M^2 + Z(M)M - det(M)I_3 = O_3.$$

où $Z(M) = -\frac{1}{2}(tr(M^2) - tr(M)^2)$. Vérifier cette relation pour B.

Colle L2PR-1 A2

1 Question de cours

a) Donner la définition de groupe et sous-groupe.

b) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Définir $Ker(f)$, $Im(f)$ et $rg(f)$.

2 Exercice

a) Calculer les DLs suivants au point demandé :

i) $\mathrm{DL}_5(\ln(1+x)\sin(x),0)$

ii) $\mathrm{DL}_4\ (\frac{1+x}{2+x}, 0)$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = xe^{x^2}$.

i) Montre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de classe C^∞.

ii) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.
Ind : Ne pas chercher à expliciter f^{-1}.

Colle L2PR-1 B1

1 Question de cours

a) Donner la définition de : "f admet un DL_n en x_0" en explicitant les hypothèses.

b) Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions ch(x) et cos(x).

2 Exercice

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit f un endomorphisme de E. Définir le terme "endomorphisme" puis montrer de manière détaillée que les équivalences suivantes sont vraies.

a) $Ker(f^2) = Ker(f) \Leftrightarrow Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$

b) $Im(f^2) = Im(f) \Leftrightarrow Ker(f) + Im(f) = E$

c) On suppose maintenant que E est de dimension fini tel que $dim(E) = n$. Démontrer :

$$Ker(f^2) = Ker(f) \Leftrightarrow Im(f^2) = Im(f) \Leftrightarrow Ker(f) \bigoplus Im(f) = E$$

Colle L2PR-1 B2

1 Question de cours

a) Donner la définition d'anneau unitaire.

b) Donner la définition de deux matrices semblables.

2 Exercice

a) Trouver x et y tels que $v = (-2, x, y, 3)$ appartiennent au sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = -1, 2, 3, 1$.

b) Soit f, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

  i) Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On la note M.

  ii) Calculer M^2.

  iii) Conclure sur l'endomorphisme fof.

c) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et :

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 - e_2 \\ v_2 &= 3e_1 - 2e_2 \\ v_3 &= e_3 - e_2 \end{aligned}$$

  i) Montrer que (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathbb{R}^2$.

  ii) On considèrel'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

  Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

Colle L2PR-1 C1

1 Question de cours

a) Donner la définition de deux sous-espaces F et G en somme directe.

b) Démontrer que cette définition équivaut à $F \cap G = \{0\}$

2 Exercice

a) Calculer les DLs suivants au point demandé :

   i) $\mathrm{DL}_5(\cos(\mathrm{x})\mathrm{ch}(\mathrm{x}),0)$

   ii) $\mathrm{DL}_9\ (\sin^6(\mathrm{x}),0)$

b) Le but de cet exercice est de mettre en avant plusieurs manières de (re)trouver le DL de la fonction tangente en 0.

   i) En utilisant que $tan'(x) = 1 + tan^2(x)$ (deux manières)

   ii) En utilisant la définition de la fonction tangente.

   iii) En utilisant $tan(arctan(x)) = x$ et $arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Colle L2PR-1 C2

1 Question de cours

a) Donner la définition de fonctions équivalentes.

b) Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 des fonctions (1+x)$^\alpha$ et ln(1-x).

2 Exercice

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & 10 \\ -5 & 2 & -5 \\ -12 & 6 & -13 \end{pmatrix}$$

Soit $e'_1 = 2e_1 - e_2 - 2e_3,\ e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = -2e_1 + e_2 + 3e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer la matrice $B = Mat_{\mathcal{B}'} f$.

3. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, puis écrire la formule qui relie A, B et P.

4. Quelle est la valeur du déterminant de A ?

5. Calculer B^4 puis A^4.

6. Soit $X = (1, 2, 3)$. Quelle est la matrice de X dans la base $\mathcal{B}$? Dans la base $\mathcal{B}'$ (de deux manières différentes) ?

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Soit $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,\ e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer la matrice $B = Mat_{\mathcal{B}'} f$.
3. Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, puis écrire la formule qui relie $A,\ B$ et P.
4. Quelle est la valeur du déterminant de A ?
5. Calculer B^4 puis A^4.
6. Soit $X = (1, 2, 3)$. Quelle est la matrice de X dans la base $\mathcal{B}$? Dans la base $\mathcal{B}'$ (de deux manières différentes) ?

Exercice 2

Quelques DLs à calculer

a) En 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x}$

b) En 0 à l'ordre 2n de $\frac{1}{1+x^2}$

c) En 0 à l'ordre 6 de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d) En 0 à l'ordre 6 de $\arcsin(x)$

Exercice 3

a) Soit E un espace vectoriel sur R, f et g deux endomorphismes de E. Montrer que $fog = 0$ ssi $Im(G) \subset Ker(F)$.

b) Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^2 = 0$.

   i) En utilisant la question précédente, calculer le noyeau et l'image de f.

   ii) Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle l'endomorphisme f a pour matrice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$