Colle L2PR-10 A1

1 Question de cours

i) Définir la convergence de $\int_x^y f(t)$ et son absolue convergence.

ii) Qu'est ce qu'une intégrale impropre ? Précisez les conditions d'existence (definition 4.2).

iii) Énoncer le critère de Cauchy pour les intégrales impropres (theoreme 4.1).

2 Exercice

a) Donner rang et signature des formes quadratiques suivantes :

  i) $Q((x, y, z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz.$

  ii) $Q((x_1, \cdots, x_n)) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j$

b) Soit $Rn[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geqslant 1$). Pour tous $P, Q \in Rn[X]$, on pose :

$$B(P,Q) = \int tP(t)Q'(t)dt.$$

$$q(P) = B(P,P).$$

  i) Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? antisymétrique ?

  ii) Montrer que q est une forme quadratique. La forme q est-elle définie ?

  iii) Calculer la matrice de q dans la base $B_n = (1, X, \cdots, X_n)$

Colle L2PR-10 A2

1 Question de cours

i) Définir "forme quadratique de E dans $\mathbb{R}$". Quelle est la forme bilinéaire associée ?

ii) Définir son rang et son noyau.

iii) Qu'est ce qu'une forme bilinéaire dégénérée ?

2 Exercice

i) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n dt$

ii) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n dt$

iii) Soit la fonction :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} exp(-t) dt$$

définie pour tout x positif. En introduisant :

$$I_n(x) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$$

démontrer que $\Gamma(x)$ peut être donné comme la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Colle L2PR-10 B1

1 Question de cours

i) Définir "forme quadratique de E dans $\mathbb{R}$". Quelle est la forme bilinéaire associée ?

ii) Définir sa signature.

iii) Qu'est ce qu'une forme bilinéaire non dégénérée ?

2 Exercice

i) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{exp(t)+t^n}$

ii) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt$ avec f continue admettant une limite finie en $+\infty$.

iii) On pose pour $n \geqslant 1$:

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$$

Déterminer la limite de I_n quand n tend vers l'infini. On la note l. Déterminer un équivalent de $l - I_n$.

Colle L2PR-10 B2

1 Question de cours

i) Énoncer le théorème de continuité pour les intégrales à paramètre (théorème 5.6)

ii) Énoncer le théorème de convergence dominée pour les séries de fonction (théorème 5.5).

2 Exercice

a) Donner rang et signature des formes quadratiques suivantes :

  i) $Q((x, y, z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$

  ii) $Q((x_1, \cdots, x_n)) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j$

b) Soit φ l'application de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(A, B) = det(A + B) - det(A - B).$$

  i) Donner la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

  ii) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

  iii) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique.

Colle L2PR-10 C1

1 Question de cours

i) Définir "forme quadratique de E dans $\mathbb{R}$". Quelle est la forme bilinéaire associée ?

ii) Définir "espace Euclidien".

iii) Qu'est ce qu'une forme quadratique positive ?

2 Exercice

i) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$

ii) Déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\int_0^{+\infty} nf(t)exp(-nt)dt$ avec f continue, positive et bornée.

iii) Soit la fonction :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} exp(-t)dt$$

définie pour tout x positif. En introduisant :

$$I_n(x) = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{x-1} dt$$

démontrer que $\Gamma(x)$ peut être donné comme la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$\frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Colle L2PR-10 C2

1 Question de cours

i) Énoncer le théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètre (théorème 5.2)

ii) Énoncer la formule de Leibniz (théorème 5.7) sur la dérivation des intégrales à paramètre.

2 Exercice

a) Donner rang et signature des formes quadratiques suivantes :

i) $Q((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx$

ii) $Q((x_1, \cdots, x_n)) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ijx_ix_j$

b) Soit B une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel V et soit q sa forme quadratique associée.

i) Montrer l'identité de Cauchy :

$$q(q(u)v - B(u,v)u) = q(u)[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)]$$

ii) En déduire, si q est définie positive, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$B(u,v)B(v,u) \leqslant q(u)q(v).$$

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive.

i) Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inversible T telle que $A =^t TT$.

ii) Montrer que le déterminant de A est inférieur ou égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Exercice 2

Déterminer noyau, rang et signature des formes quadratiques suivantes :

i) $q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz$.

ii) $q(x, y, z, t, s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st$.

Exercice 3

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{exp(t) - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 4

Établir que :

$$\int_0^1 \frac{ln(1+t)}{t} dt = -\int_0^1 \frac{ln(t)}{1+t} dt.$$

En déduire que :

$$\int_0^1 \frac{ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Calculer cette somme sachant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{pi^2}{6}$$