Colle L2PR-4 A1

1 Question de cours

a) Soit $A, B \in K[X]$. Donnez la définition de B divise A.

b) Soient $A, B, C \in K[X]$. Que vaut $pgcd(AB, AC)$? Démontrez-le.

2 Exercice

On pose, pour $n \geqslant 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

a) Démontrer que (fn) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.

b) Étudier les variations de g.

c) En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

d) Soit $a \in]0,1]$. Montrez-qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $exp(-\frac{1}{n}) \geqslant a$ pour tout $n \geqslant n_0$. Démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Colle L2PR-4 A2

1 Question de cours

a) Donner la définition de convergence simple et de convergence uniforme d'une suite de fonction sur un ensemble. Donner la définition de "suite uniformément de Cauchy" ($\sim$ suite vérifiant le critère de Cauchy).

b) Quel est le lien entre ces concepts ?

2 Exercice

a) Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = 3X^5 + 4X^2 + 1$ et $B = X^2 + 2X + 3$.

b) Trouver tous les polynômes P tels que $P + 1$ soit divisible par $(X - 1)^4$ et $P - 1$ par $(X + 1)^4$ de deux manières différentes.

Colle L2PR-4 B1

1 Question de cours

a) Donner la définition d'une suite de fonction.

b) Énoncer et démontrer le théorème d'interversion de limite et d'intégration pour les suites de fonctions.

2 Exercice

a) Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = 3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ et $B = X^3 + X + 2$.

b) Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

   a) $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

   b) $(P')^2 = 4P$

   c) $PoP = P$

c) Soit $(A, B) \in (K[X])^2$ non nuls. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

   i) A et B ne sont pas premiers entre eux.

   ii) il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}[X] - \{0\})^2$ tel que $AU + BV = 0$, $deg(U) < deg(B)$ et $deg(V) < deg(A)$.

Colle L2PR-4 B2

1 Question de cours

a) Soient $A, B \in K[X]$ avec B non nul. Énoncer le théorème de division euclidienne.

b) Soient $A, B, C \in K[X]$. On suppose que A divise BC et que $pgcd(A, B) = 1$. Que peut-on en déduire reliant A et C ? Démontrez-le.

2 Exercice

a) Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Démontrer que chaque f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}$?

b) Soit $a \geqslant 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1 - x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

c) Démontrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues est elle-même uniformément continue.

Colle L2PR-4 C1

1 Question de cours

a) Soit $A \in \mathbb{K}[X] \mathbb{K}$. Donner la définition mathématique de A est irréductible.

b) Donnez la relation de Bezout et démontrez-la.

2 Exercice

1) Soit (f_n) une suite de fonction définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

   a) Faire une figure pour quelques valeurs de n.

   b) Déterminer la limite de (f_n) quand n tend vers l'infini.

   c) Préciser si la convergence est uniforme dans les trois cas suivants :

      i) Sur $]-\infty, 0[$.

      ii) Sur un segment contenant l'origine.

      iii) Sur $[a, +\infty]$, $a > 0$.

2) Etudier la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = (sin(x))^n cos(x)$.

Colle L2PR-4 C2

1 Question de cours

a) Donner la définition d'une suite de fonction.

b) Énoncer le théorème de dérivation pour les suites de fonctions.

2 Exercice

a) Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = X^4 - X^3 + X - 2$ et $B = X^2 - 2X + 4$.

b) On cherche les polynômes $P(X) = (X - a)(X - b) \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X)$ divise $P(X^3)$.

   i) Montrer que, si $a = b$ alors $P \in \mathbb{R}[X]$.

   ii) Montrer que si $a \neq b$ et $a^3 \neq b^3$, il existe 6 polynômes dont 4 dans $\mathbb{R}[X]$.

   iii) Trouver les polynômes P si $a \neq b$ et $a^3 = b^3$ et en déduire que 13 polynômes en tout conviennent, dont 7 dans $\mathbb{R}[X]$.

AUTRES EXERCICES

Exercice 1

Etudier la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = exp(\frac{(n-1)x}{n})$.

Exercice 2

Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a Étudier la limite simple de la suite (f_n).

b Calculer :

$$\int_0^1 f_n(t)dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

c Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 3

1. Effectuer la division euclidienne de A par B avec $A = X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ et $B = X^2 - 5X + 4$.

2. À quelle condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$, le polynôme

$$X^4 + aX^2 + bX + c$$

est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Exercice 4

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls. Montrer que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $A + B$ et AB le sont.

Exercice 5

Décomposer P et Q en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ en sachant qu'ils ont une racine commune.

$$P(X) = X^3 - 9X^2 + 26X$$

$$Q(X) = X^3 - 7X^2 + 7X + 15$$