# Colle L2PR-9 A1

## 1 Question de cours

i) Définir la convergence de $\int_x^y f(t)$ et son absolue convergence.

ii) Qu'est ce qu'une intégrale impropre ? Précisez les conditions d'existence (definition 4.2).

iii) Énoncer le critère de Cauchy pour les intégrales impropres (theoreme 4.1).

## 2 Exercice

a) Soit $(x_1 \dots x_n)$ une famille orthogonale. Montrer le théorème de Pythagore en dimension $n$.

b) De deux manières différentes, déterminer la matrice du projecteur orthogonal sur $P$ dans la base canonique avec :

$$P = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bigoplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Colle L2PR-9 A2

## 1 Question de cours

i) Définir un endomorphisme symétrique. Et donner, en le justifiant, un exemple.

ii) Définir un endomorphisme positif et défini positif. Donner les équivalnts matriciels.

iii) Montrer que si $A$ est une matrice carrée réelle symétrique, il existe $D$ matrice diagonale et $P$ matrice orthogonale, telles que :
$$A = PDP^{-1}$$
(théorème spectral)

## 2 Exercice

a) Calculer la série de Fourier trigonométrique de la fonction $2\pi$-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi;\pi]$. La série converge-t-elle vers f ?

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique, impaire, telle que
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0,\pi[ \\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

i) Calculer les coefficents de Fourier trigonométrique de $f$.

ii) Etudier la convergence de la série de Fourier de $f$.

iii) En déduire les valeurs des sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \; ; \; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \; ; \; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \; ; \; \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

# Colle L2PR-9 B1

## 1 Question de cours

i) Définir un espace euclidien et base orthonormée. Quel est le lien entre les deux ?

ii) Montrer que si un endomorphisme symétrique stabilise un sous-espace, il stabilise son orthogonal.

iii) Montrer que si $A$ est une matrice carrée réelle symétrique, il existe $D$ matrice diagonale et $P$ matrice orthogonale, telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

(théorème spectral)

## 2 Exercice

Etudier la convergence des intégrales suivantes.

i) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{exp(x)-1} dx$

ii) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$

iii) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

iv) $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x^a} dx$, $a \in \mathbb{R}$.

v) $\int_0^{+\infty} x^3 sin(x^8) dx$

# Colle L2PR-9 B2

## 1 Question de cours

i) Énoncer et démontrer le théorème fondamental de comparaison des intégrales (théorème 4.4)

ii) Énoncer le lemme d'Abel pour les intégrales (théorème 4.6).

iii) Donner la définition de série de Fourier réelle de $f$ en précisant les hypothèses sur $f$ (définition 3.7).

## 2 Exercice

a) Soit $(E, < \mid >)$ un espace euclidien et $p$ un projecteur de $E$. Montrer que $p$ est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\forall x \in E$ :

$$\|p(x)\| \leq \|x\|$$

b) Montrer l'existence et unicité et calculer $a$ et $b$ tels que

$$\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$$

soit minimum (on pourra traiter cet exercice avec les éléments vus au lycée mais l'approche qui nous intéresse est celle de niveau $L2$.)

# Colle L2PR-9 C1

## 1 Question de cours

i) Énoncer le théorème de continuité pour une intégrale à paramètre (théorème 5.6).

ii) Énoncer la règle de dérivation sous le signe d'intégration (aussi notée Formule de Leibniz pour les intégrales ou théorème 5.7).

iii) Donner la définition de la transformée de Fourier

## 2 Exercice

a) On définit une application $< .,. >$ de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par la formule, $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$< P, Q >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

i) Montrer que l'application $< .,. >$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

ii) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

iii) Calculer la distance de $X^3$ à $\mathbb{R}_2[X]$.

# Colle L2PR-9 C2

## 1 Question de cours

i) Soit $E$ un espace réel. Définir le produit scalaire de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

ii) Montrer que si un endomorphisme symétrique stabilise un sous-espace, il stabilise son orthogonal.

iii) Soient $(E, < | >)$ un espace euclidien et $f$ un endormorphisme de E. Soient $B = (ei)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E et $A = Mat_B(f)$. Montrer que $f$ est symétrique si, et seulement si, $A$ l'est aussi.

## 2 Exercice

Etudier la convergence des intégrales suivantes.

i) $\int_0^1 cos^2(\frac{1}{x})dx$

ii) $\int_0^{+\infty} \frac{ln(x)}{x^2+1}dx$

iii) $\int_0^{+\infty} \frac{arctan(x)dx}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

iv) $\int_0^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}dx$

v) $\int_0^{+\infty} cos(exp(x))dx$

# AUTRES EXERCICES

## Exercice 1

Justifier que la matrice $A$ est diagonalisable et trouver la matrice orthogonale $P$ telle que $D = P^t DP$. On donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2

i) Soit $u$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, < .|. >)$ vérifiant, $\forall x \in E : < u(x), x >= 0$. Que peut-on dire de $u$ ?

ii) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Que vaut $A$ ?

iii) Sur $R[X]$, on suppose le produit scalaire :

$$< P|Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $< P, Q >= P(0)$ ?

## Exercice 3

Discuter suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence des intégrales suivantes.

i) $\int_0^{+\infty} \frac{xln(x)dx}{(1+x^2)^\alpha}$

ii) $\int_0^{+\infty} x^\alpha ln(x + exp(\alpha x))dx$

## Exercice 4

Calculer la série de Fourier, sous forme trigonométrique, de la fonction $2\pi$-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ sur $[0; 2\pi[$. La série converge-t-elle vers $f$ ?